PART2 漸化式と一般項

要点 ① 等差数列・等比数列を表す漸化式

等差数列の各項は，前の項に一定の数 d(公差) を足すことによって順次得られる。よって，等差数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1}=a_n+d$$

この漸化式が与えられることにより，等差数列の公差 d が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等差数列の一般項を求めることができる。

例 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ は，初項　，公差　の等差数列である。

よって　$a_n=\ \ +(n-1)\cdot\ \ =2n-1$

等比数列の各項は，前の項に一定の数 r(公比) を掛けることによって順次得られる。よって，等比数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1}=ra_n$$

この漸化式が与えられることにより，等比数列の公比 r が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等比数列の一般項を求めることができる。

例 $a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ は，初項　，公比　の等比数列である。

よって　$a_n=\ \ \cdot\ \ ^{n-1}$

要点 ② $a_{n+1}=a_n+(n\text{の式})$ の形の漸化式

$a_{n+1}=a_n+(n\text{の式})$ の形をした漸化式は，$a_{n+1}-a_n=(n\text{の式})$ と変形することができる。この n の式は，数列 $\{a_n\}$ の「階差数列」の一般項を表す。この階差数列の一般項を用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

例 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n-2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=n-2$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k-2)=2+\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-5n+8)$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=\dfrac{1}{2}(n^2-5n+8)$

[MEMO]

2 (1) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=-3$，$a_{n+1}=a_n+5$　　(ii) $a_1=9$，$a_{n+1}=3a_n$

(2) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+8n$　　(ii) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

Point Pickup

等差数列・等比数列を表す漸化式

$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+d$ …… 初項 a，公差 d の等差数列を表す

$a_1=a$，$a_{n+1}=ra_n$ …… 初項 a，公比 r の等比数列を表す

$a_{n+1}=a_n+(n$の式$)$ の形の漸化式

$a_{n+1}-a_n=(n$の式$)$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $(n$ の式$)$ である。

第 5 講　PART2 確認問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_n=$ [ア] $n-$ [イ]

2　$a_1=2$，$a_{n+1}=5a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_n=$ [ウ] $\cdot$ [エ] $^{n-1}$

3　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+6n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_n=$ [オ] n^2- [カ] $n+$ [キ]

4　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_n=$ [ク] $^n+$ [ケ]

PART2 漸化式と一般項

2 (1) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=-3,\ a_{n+1}=a_n+5$　　(ii) $a_1=9,\ a_{n+1}=3a_n$

(2) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+8n$　　(ii) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+4^n$

[解答]

(1)(i) 初項 -3，公差 5 の等差数列を表す。

よって $a_n=-3+(n-1)\cdot 5=5n-8$

(ii) 初項 9，公比 3 の等比数列を表す。

よって $a_n=9\cdot 3^{n-1}=3^2\cdot 3^{n-1}=3^{n+1}$

(2)(i) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=8n$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=4+\sum_{k=1}^{n-1}8k=4+8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=4(n^2-n+1)$$

$a_1=4$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=4(n^2-n+1)$

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=4^n$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=2+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=\dfrac{4^n+2}{3}$

第5講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：3

[解説]

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4$ [A]

数列 $\{a_n\}$ は，初項1，公差4の等差数列であるから，

$$a_n=1+(n-1)\cdot 4 \quad \text{[B]}$$
$$=\mathbf{4n-3}$$

[A]　$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+d$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公差 d の等差数列

[B]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は，
$a_n=a+(n-1)d$

2

[正解] ウ：2，エ：5

[解説]

$a_1=2$，$a_{n+1}=5a_n$ [C]

数列 $\{a_n\}$ は，初項2，公比5の等比数列であるから，

$$\boldsymbol{a_n=2\cdot 5^{n-1}} \quad \text{[D]}$$

[C]　$a_1=a$，$a_{n+1}=ra_n$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公比 r の等比数列

[D]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は，
$a_n=ar^{n-1}$

3

[正解] オ：3，カ：3，キ：1

[解説]

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+6n$ [E]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$$b_n=6n$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad \text{[F]}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}6k$$
$$=1+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=3n^2-3n+1$$

$a_1=1$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=3n^2-3n+1}$

[E]　$a_{n+1}-a_n=6n$
$6n$ が階差数列の一般項になる。

[F]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq 2$ のとき，
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

4 [正解] ク：2，ケ：1

[解説]

$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2^n$ [G]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$$b_n=2^n$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$ [H]

$$=3+\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=2^n+1$$

$a_1=3$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=2^n+1}$

[G]　$a_{n+1}-a_n=2^n$
2^n が階差数列の一般項になる。

[H]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき，
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$